LIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
PRUEBA DE SELECCIÓN
PRIMER DÍA (03/05/12)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. En cada cara de un cubo hay escrito un número entero (puede haber repeticiones). En cada movida se eligen dos caras adyacentes del cubo (con una arista común) y se aumenta en 1 cada uno de los números escritos en esas dos caras. Hallar la condición necesaria y suficiente que debe cumplir la numeración del cubo para que sea posible, al cabo de varias movidas, terminar con un cubo con los mismos números en sus 6 caras.

2. Hallar todos los enteros positivos *x*, *y* tales que $x + y + 1$ divide a $2xy$ y $x + y - 1$ divide a $x^2 + y^2 - 1$.

3. Sea *ABC* un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$ y circunferencia circunscrita Γ. La circunferencia Γ_1 de centro *A* y radio *AB* corta al lado *BC* en *E* y a la circunferencia Γ en *F*. La recta *EF* corta por segunda vez a la circunferencia Γ en el punto *D* y al lado *AC* en el punto *M*. La recta *AD* corta al lado *BC* en el punto *K*. Finalmente, la circunferencia circunscrita al triángulo *BKD* corta a la recta *AB* en *L*. Demostrar que los puntos *K*, *L*, *M* pertenecen a una recta paralela a *BF*.
ACLARACIÓN: La circunferencia circunscrita al triángulo *XYZ* es la circunferencia que pasa por *X*, *Y* y *Z*.

LIII OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

SEGUNDO DÍA (04/05/12)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Se tiene una varilla de longitud 200 que se corta en N pedazos, todos de longitudes enteras. Hallar el menor valor de N tal que siempre es posible armar el borde de un rectángulo utilizando todos los N pedazos, cualquiera sean los tamaños de los pedazos en los que se partió la varilla. (No se permite partir pedazos.)

5. En un triángulo acutángulo ABC sea M el punto medio del lado AB y P, Q los pies de las alturas AP, BQ, respectivamente. La circunferencia que pasa por B, M, P es tangente al lado AC. Demostrar que la circunferencia que pasa por A, M, Q es tangente a la prolongación del lado BC.

6. Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(x^2+f(y))=y-x^2$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$.

Sea $M = \{1, 2, 3, ..., 10000\}$. Demostrar que existen 16 subconjuntos de M tales que: para cada $a \in M$ es posible elegir 8 de esos subconjuntos tales que su intersección es $\{a\}$.

Los vértices de un polígono regular P de 100 lados están rotulados en sentido contrario a las agujas del reloj con $x_1, x_2, ..., x_{100}$, donde $x_1, x_2, ..., x_{100}$ es una permutación de 1, 2, ..., 100. Sea r un eje de simetría de P. Diremos que una rotulación $x_1, x_2, ..., x_{100}$ es regular con respecto a r si todos los números x_i que están a uno de los lados de r son mayores que sus respectivos simétricos con respecto a r. (No se consideran los números que están sobre r.) Determinar todas las rotulaciones $x_1, x_2, ..., x_{100}$ que son regulares con respecto a todos los ejes de simetría de P. Rotulaciones que se obtienen una de la otra mediante una rotación alrededor del centro de P se consideran la misma rotulación.

1. En un tablero cuadrado de $n \times n$ se marcan los centros de varias casillas de modo que no haya tres puntos marcados que sean los vértices de un triángulo rectángulo. ¿Cuál es el máximo número de centros que puede haber marcados?

2. Los 300 números no negativos $x_1, x_2...., x_{300}$ tienen suma igual a 1. Hallar el valor máximo de $S = \sum x_i x_j$, donde la suma se toma sobre todos los pares de enteros *i*, *j*,
$1 \leq i < j \leq 300$, tales que *i* divide a *j*.

6. Sea $n \geq 3$ un entero impar y sea *M* el conjunto de los enteros positivos mayores o iguales que – *n* y menores o iguales que *n*. Un subconjunto *P* de *M* se llama *base* si cada elemento de *M* se puede expresar como suma de *n* elementos de *P*. Hallar el menor entero positivo *k* tal que todo subconjunto de *M* con *k* elementos es una base.